Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
Департамент научно-технологической политики и образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный аграрный университет»

МАТЕМАТИКА :
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки
19.03.01 Биотехнология, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения,
19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания

Персиановский
2018

УДК 51
ББК 22.1
М 34

Рецензенты: Скрипин П.В. канд. тех. наук, доцент, декан биотехнологического Факультета, Донской ГАУ;
Баленко Е.Г. к. канд. с/х. наук, зав.кафедрой естественнонаучных дисциплин, Донской ГАУ;

М 34 Математика : интегрирование функций и дифференциальных уравнений : методические указания к практическим занятиям, для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 19.03.01 Биотехнология, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания / сост. А.Г. Мокриевич ; Донской ГАУ. – Персиановский : Донской ГАУ, 2018. – 30 с.

В работе приведены примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы и вопросы для самопроверки.

Методические указания предназначены для студентов направлений подготовки: 19.03.01 Биотехнология, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения, 19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания
очной и заочной форм обучения. Они могут быть использованы студентами других направлений подготовки.

УДК 51
ББК 22.1

Библиография – 6 наименований.

Утверждено на методической комиссии агрономического факультета (протокол № 5 от 2102.2018).

Рекомендовано к изданию методическим советом Донского ГАУ (протокол № 2 от 29.03.2018).

Оглавление

1. Неопределенный интеграл

1.1. Примеры выполнения типовых заданий

Задание 1. Вычислить интеграл**.**

$$\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} = 2\cdot x^{-\frac{3}{2}} + 3\cdot x^{-\frac{5}{6}} + 5\cdot\frac{1}{x}$$

Далее представляем интеграл алгебраической суммы в виде суммы интегралов слагаемых, вынося постоянные множители за знаки интегралов, и, пользуясь таблицей интегралов, получим:

$$\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx + 3\int x^{-\frac{5}{6}}dx + 5\int\frac{dx}{x} =$$

$$\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 3\frac{x^{-\frac{5}{6}+1}}{-\frac{5}{6}+1} + 5\ln|x| + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln|x| + C\right)' = \left(-4x^{-\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + 5\ln x + C\right)' =$$

$$\left(-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} + 18\cdot\frac{1}{6}\cdot x^{\frac{1}{6}-1} + 5\cdot\frac{1}{x}\right) = x^{-\frac{2}{3}}\left(2 + 3x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}.$$

Задание 2. Вычислить интеграл

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$$

Решение.

Первый способ. Полагая 1+2cosx = t, -2sinxdx = dt , получим

$$\int\frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1+2\cos x} + C$$

Второй способ.

Умножая и деля на –2 и замечая, что, , -2sinxdx = d(1+2cosx) получим

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1+2\cos x)}{\sqrt{1+\cos x}} = \frac{1}{2}\int (1+\cos x)^{-\frac{1}{2}} d(1+\cos x) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(1+2\cos x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -(1+2\cos x)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1+2\cos x} + C..$$

Проверка.

$$\left(-\sqrt{1+2\cos x} + C\right)' = \frac{2\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}$$

Задача 3. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx$ *б*) $\int \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Решение.

а) $$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx = [\sin x = t; \quad (\sin x)' dx = t' dt; \quad dt = \cos x dx \ ] =$$

$$= \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg (\frac{\sin x}{2}) + C \quad .$$

Используем подстановку t=sinx. Учитывая, что dt=cosxdx, приводим к табличному интегралу для переменной t. Используя принятую замену переменной, вернемся к переменной x.

б) $$\int \frac{\cos \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = [x = t^3; \quad dx = (t^3)' dt = 3t^2 dt; \quad \sqrt[3]{x} = t; \quad \sqrt[3]{x^2} = t^2] =$$

$$= \int \frac{\cos t}{t^2} \cdot 3t^2 dt = 3\int \cos t dt = 3\sin t + C = 3\sin \sqrt[3]{x} + C.$$

Используем подстановку $x=t^3$, находим

$$\sqrt[3]{x^2} = t; \quad \sqrt[3]{x} = t; \quad dx = 3t^2 dt.$$

Подставляя полученные выражения в данный интеграл, приводим к табличному интегралу. Возвращаясь к старой переменной x, получим решение.

Задание 4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

Решение.

Для вычисления интеграла от функции, содержащей квадратный трехчлен, надо выделить полный квадрат их квадратного трехчлена, заменить переменную, в результате чего получим табличные интегралы.

Выделяя полный квадрат в знаменателе, имеем:
$x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2$. Далее, заменяя $x + 1 = t, dx = dt$, получим:

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{tdt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C.$$

Проверка:

$$\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{tdt}{t^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} = \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C.$$

Задача 5. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{x-2}{2x^2+5x+6} dx$$

Решение. Преобразуем дробь, стоящую под интегралом. Выделим в числителе из (x-2), производную знаменателя, равную $(2x^2+5x+6)'=4x+5$. Чтобы величина числителя не изменилась, запишем

$$x-2 = \frac{1}{4}(4x+5) - 2 - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}(4x+5) - \frac{13}{4} \qquad .$$

Поэтому

$$\int \frac{x-2}{2x^2+5x+6}dx = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+5)-\frac{13}{4}}{2x^2+5x+6}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+5}{2x^2+5x+6}dx - \frac{13}{4}\int \frac{dx}{2x^2+5x+6} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+6\right| - \frac{13}{4}\int \frac{dx}{2(x+\frac{5}{4})^2+\frac{23}{8}} = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+6\right| - \frac{13}{8}\int \frac{dx}{(x+\frac{5}{4})^2+\frac{23}{16}} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+6\right| - \frac{13}{8}\cdot\frac{4}{\sqrt{23}} arctg \frac{(x+\frac{5}{4})\cdot 4}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+6\right| - \frac{13}{2\sqrt{23}} arctg \frac{4x+5}{\sqrt{23}} + C = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2+5x+6\right| - \frac{13\sqrt{23}}{46} arctg \frac{\sqrt{23}(4x+5)}{23} + C.$$

После выделения в числителе производной знаменателя преобразуем интеграл в разность двух интегралов. Во втором интеграле в знаменателе выделяем полный квадрат.

Задание 6. Вычислить интеграл

$$\int \sqrt{x}\ln x dx$$

Решение. При вычислении этого интеграла надо применить метод интегрирования по частям. Положив, ln x = u, dv = $\sqrt{x}\,dx$ найдем:

$$du = \frac{1}{x}dx\ ; v = \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

Подставляя в формулу интегрирования по частям, получим

$$\int \sqrt{x}\ln x dx = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\ln x - \int \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{4}{9}\sqrt{x^3} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C.$$

Проверка:

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C\right]' = \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{x^3}\right)'\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + \sqrt{x^3}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right)'\right] =$$

$$\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + \sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{x}\right] = \sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x\cdot\ln x}.$$

При интегрировании по частям важен выбор функции u и v. В качестве u выбирается та часть подынтегрального выражения, которая существенно упрощается при дифференцировании. За dv – та часть подынтегрального выражения вместе с dx, которая может быть проинтегрирована.

Задача 7. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx$$

Решение.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = [u = \ln x; \quad dv = \frac{dx}{x^3}; \quad du = \frac{dx}{x}; \quad v = \int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2x^2}.$$

По формуле интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \textit{находим} \quad \int \frac{\ln x}{x^3}dx = \ln x\cdot(-\frac{1}{2x^2}) - \int(-\frac{1}{2x^2})\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

1.2. Задания для самостоятельной работы

1. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$ б) $\int (x-5)\cos x dx$ в) $\int \frac{x-4}{x^2+x-12}dx$

2. а) $\int \frac{dx}{(6+\sqrt[3]{x})^4\sqrt[3]{x^2}}$ б) $\int x arctg x dx$ в) $\int \frac{3-5x}{4x^2+16x-9}dx$

3. а) $\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x}dx$ б) $\int (x-7)\sin x dx$ в) $\int \frac{6x-1}{x^2-4x+13}dx$

4. а) $\int x^2 6^{1-x^3} dx$ б) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ в) $\int \frac{12x+11}{9x^2-6x+2}dx$

5. а) $\int \sqrt[4]{e^{3x}+8}e^{3x}dx$ б) $\int (1-3x)\cos 2x dx$ в) $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$

6. а) $\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}}dx$ б) $\int \ln(1+x^2)dx$ в) $\int \frac{2x-3}{x^2+x+5}dx$

7. а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$ б) $\int (x+1)e^x dx$ в) $\int \frac{7x-8}{x^2+5x+17}dx$

8. а) $\int \frac{7^x}{\sqrt{49^x+1}}dx$ б) $\int \frac{xdx}{\cos^2 4x}$ в) $\int \frac{3x-11}{x^2+8x+18}dx$

9. а) $\int \sin x\cos^2 x dx$ б) $\int (x+2)3^x dx$ в) $\int \frac{x+7}{x^2+11x+42}dx$

10. а) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x\sqrt{\cos x}}dx$ б) $\int x^3 \ln x dx$ в) $\int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$

11. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx$ б) $\int x\ln x dx$ в) $\int \frac{7x+4}{x^2+x+9}dx$

12. а) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$ б) $\int \frac{x}{\sin^2 3x}dx$ в) $\int \frac{5x-7}{x^2+3x+8}dx$

$$13.а)\int x\sqrt{x^2-7}dx \qquad б)\int \frac{\ln x}{x^2}dx \qquad в)\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$$

$$14.а)\int \frac{\sqrt{5tgx}}{\cos^2 x}dx \qquad б)\int 4^x \sin xdx \qquad в)\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$$

$$15.а)\int \frac{dx}{\sqrt[7]{ctg^4 x}\sin^2 x}dx \qquad б)\int \arcsin 3xdx \qquad в)\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$$

$$16.а)\int \frac{1-4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad б)\int arctg\left(\frac{x}{2}\right)dx \qquad в)\int \frac{4x+8}{3x^2+2x+5}dx$$

$$17.а)\int \frac{\sqrt[4]{arctgx}}{1+x^2}dx \qquad б)\int xe^{5x}dx \qquad в)\int \frac{x+5}{2x^2+2x+3}dx$$

$$18.а)\int \frac{dx}{(x^2+1)arcctgx} \qquad б)\int e^{2x}\cos xdx \qquad в)\int \frac{5x-7}{8x^2+x+1}dx$$

$$19.а)\int \sqrt{1-2\sin x}\cos xdx \qquad б)\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx \qquad в)\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$20.а)\int e^{4\cos x-1}\sin xdx \qquad б)\int (x^2+2x+3)\cos xdx \qquad в)\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$$

1.3. Вопросы для самопроверки

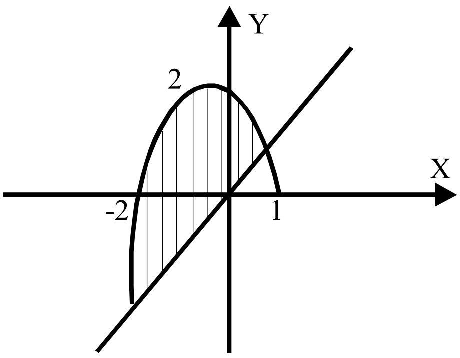
1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Напишите формулы основных интегралов.
5. В чем сущность метода интегрирования заменой переменной?
6. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

2. Определенный интеграл

2.1. Примеры выполнения типовых заданий

Задание 1. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и параболой $y = 2 - x^2$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения прямой с параболой:



$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$

$x - 2 + x^2 = 0$

$x_1 = -2;\ x_2 = 1$

Воспользуемся формулой для вычисления площади фигуры, ограниченной двумя кривыми:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$$

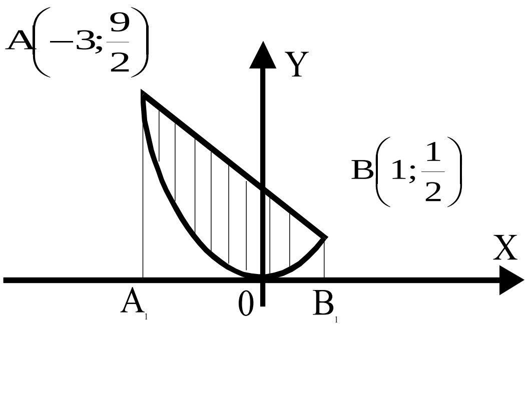
При $a = -2$, $b = 1$, $f_2(x) = 2 - x^2$, $f_1(x) = x$ получим:

$$\left(2 - x^2 - x\right)dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$S = \int_{-2}^{1} \Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5 кв. ед.

Задание 2. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$ вокруг оси OX.



Решение. Ограниченная линиями $2y=x^2$, $2x+2y-3=0$ фигура, при вращении вокруг оси OX образует тело, объем которого можно найти как разность объемов V_1 и V_2, образованных вращением вокруг оси OX трапецией A_1ABB_1 и A_1AOBB_1.

$$V_1=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2=\pi\int_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 dx=\pi\int_{-3}^{1}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 d\left(x-\frac{3}{2}\right)=\pi\,\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^3}{3}\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{91}{3}\pi;$$

$$V_2=\pi\int_{-3}^{1} y^2dx=\frac{\pi}{4}\int_{-3}^{1}x^4dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-3}^{1}=\frac{61}{5}\pi\ .$$

Искомый объем: $$V=V_1-V_2=\left(\frac{91}{3}-\frac{61}{5}\right)\pi=18\frac{2}{15}\pi\,.$$

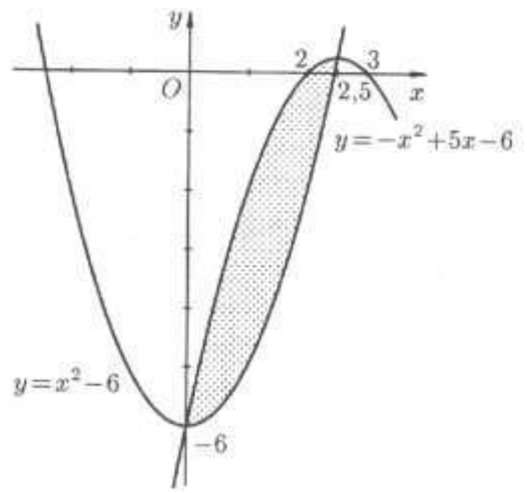
Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6$ и $y=-x^2+5x-6$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=x^2-6 \\ y=-x^2+5x-6 \end{cases}$$

$x^2-6=-x^2+5x-6$ или $2x^2-5x=0$;

$x(2x-5)=0$. Отсюда $x_1=0$ и $x_2=2{,}5$.



Площадь фигуры находим по формуле

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

$$S=\int_0^{2,5}(-x^2+5x-6)dx-\int_0^{2,5}(x^2-6)dx=\int_0^{2,5}(-x^2+5x-6-x^2+6)dx=$$

$$=\int_0^{2,5}(-2x^2+5x)dx=-2\int_0^{2,5}x^2dx+5\int_0^{2,5}xdx=-2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{2,5}+5\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2,5}=$$

$$=-\frac{2}{3}(2{,}5^3-0^3)+\frac{5}{2}(2{,}5^2-0^2)=-\frac{2}{3}\cdot 15{,}625+\frac{5}{2}\cdot 6{,}25=\frac{125}{24}=5\frac{5}{24}\qquad (кв.\quad ед.).$$

Задание 4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями xy=6, x=1, x=4, y=0 вокруг оси Ox и вокруг оси Oy.

Решение. Объемы тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox (или Oy) криволинейной трапеции, ограниченной кривой y=f(x) (f(x)≥0) и прямыми y=0, x=a, x=в, вычисляют соответственно по формулам

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx \qquad (1)$$

$$V_y=2\pi\int_a^b xydy,\quad a\geq 0 \qquad (2)$$

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy \qquad (3)$$

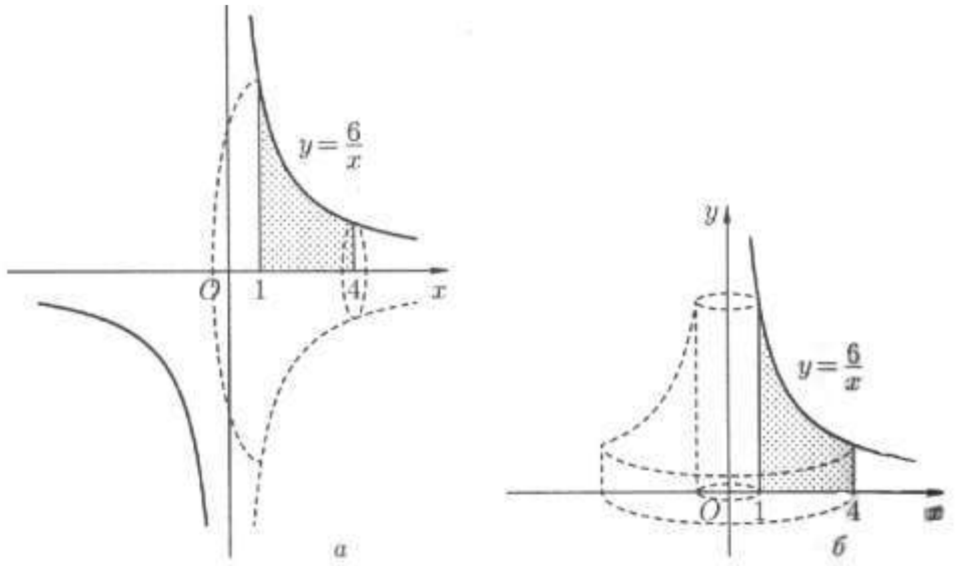
В результате вращения фигуры, ограниченной линиями xy=6, x=1, x=4, y=0 вокруг оси Ox, получим фигуру, изображенную на рис. а, вокруг оси Oy на рис. б.
По формуле (1) находим объем фигуры V_x

$$V_x=\pi\int_1^4\left(\frac{6}{x}\right)^2dx=36\pi\int_1^4\frac{dx}{x^2}=36\pi\int_1^4 x^{-2}dx=36\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4=36\pi\left(-\frac{1}{4}+1\right)=27\pi\qquad (куб.\quad ед.).$$

По формуле (2) находим объем фигуры V_y:

$$V_y = 2\pi\int_1^4\left(x\cdot\frac{6}{x}\right)dx = 12\pi\int_1^4 dx = 12\pi\cdot x\ \Big|_1^4 = 12\pi(4-1) = 36\pi \qquad (\text{куб.} \quad \text{ед.}).$$

Графическое пояснение к задаче 5.



Задание 5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки В (4;8).

Решение. Найдем y^1 и подставляя в формулу для вычисления дуги кривой

$$L = \sqrt{1+\left(y'\right)^2}$$

получим

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}d\left(1+\frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Задача 6. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = \sqrt{x^3}$ от начала координат до точки В (4;8).

Решение. Найдем $y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ и подставляя в формулу для вычисления дуги кривой $L = \sqrt{1+(y')^2}$, получим

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}d\left(1+\frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Задание 7. Найти несобственный интеграл: $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$

Решение. Пользуясь формулой $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$**,** имеем

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2b^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Задача 8. Найти несобственный интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$

Решение. Согласно равенству $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$

получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{x\ \ +1}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}(arctgx)\Big|_a^0+\lim\limits_{b\to+\infty}(arctgx)\Big|_0^b=$

$$=-arctg(-\infty)+arctg(+\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Задача 9. Найти несобственный интеграл: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}$

Решение. Согласно равенству $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^c f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_c^b f(x)dx$

получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{dx}{x\ \ +1}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{a\to-\infty}(arctgx)\Big|_a^0+\lim\limits_{b\to+\infty}(arctgx)\Big|_0^b=$

$$=-arctg(-\infty)+arctg(+\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Задание 10. Найти несобственный интеграл: $\int\limits_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ претерпевает разрыв в точке x=1, лежащей внутри отрезка интегрирования.

Используя формулу $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\eta\to+0}\int\limits_{c+\eta}^b f(x)dx$, находим

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\eta\to+0}\int_{1+\eta}^{9}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} + \lim_{\eta\to+0}\left(3\sqrt[3]{x-1}\right)\Big|_{1+\eta}^{9} =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}\right) + 3\lim_{\eta\to+0}\left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{\eta}\right) = 3 + 6 = 9.$$

2.2. Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y^2 = 1 - x; \quad x = -3.$ Сделать чертеж.

2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y^2 = 2x; \quad 1 < x < 2.$ Сделать чертеж.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y^2 = x^2 + 4x; \quad y = x + 4.$ Сделать чертеж.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$y^2 = (x + 4)^3; \quad x = 0.$ Сделать чертеж.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y^2 = x^2; \quad y = 2 - x^2.$ Сделать чертеж.

6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y^2 - x^2 = 9; \quad x - 2y = 0.$ Сделать чертеж.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y^2 = x^3; \quad x = 3.$ Сделать чертеж.

8. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями:

$y^2 = 4 - x; \quad x = 0.$ Сделать чертеж.

9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной указанными линиями:

$y = \ln x; \quad x = e; \quad y = 0.$ Сделать чертеж.

10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y^2 = x; \quad x^2 = y.$ Сделать чертеж.

В задачах 11 - 30 вычислить длину дуги заданной кривой.

11. $y = \ln x,\ 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$

12. $y = \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

13. $y = e^x,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$

14. $y = \ln\sin x,\quad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

15. $y = \sqrt{2}\,,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

16. $y = \frac{x^2}{2},\ 0 \le x \le 1$

17. $y = 1 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

18. $y = \sqrt{1-x^2},\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$

19. $y = \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

20. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2$

21. $y = e^x + 6,\ \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$

22. $y = \ln(x^2 - 1),\ 2 \le x \le 3$

23. $y = \sqrt{1-x^2} + \arccos,\ 0 \le x \le \frac{8}{9}$

24. $y = 1 - \ln\sin x,\ \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

25. $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le 3$

26. $y = 1 - \ln\cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

27. $y = 1 - \ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4$

28. $y = \ln\cos x + 2,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

29. $y = \ln 7 - \ln x,\ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

30. $y = 2 - e^x,\ \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$

В задачах 31 - 50 вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

31. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}dx$

32. $\int_0^{+\infty} чe^{-x^2}dx$

33. $\int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$

34. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

35. $\int_{-\infty}^{0} \cos 3x dx$

36. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$

37. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

38. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

39. $\int_0^{+\infty} 2x\sin x dx$

40. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

41. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 12}$

42. $\int_0^{+\infty} 2e^{-\sqrt{x}}dx$

43. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 - \cos 2x}$

44. $\int_0^1 x\ln x dx$

45. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x\ln x}$

46. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$

47. $\int_{2}^{5} \frac{dx}{(x-4)^2}$ 48. $\int_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$

49. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} tgx dx$ 50. $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$

2.3. Вопросы для самопроверки

1. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Напишите интегральную сумму для функции y=f(x) на отрезке [a;b].
3. Что называется определенным интегралом от функции y=f(x) на отрезке [a;b]?
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
6. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Напишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.
8. Как вычислить объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси Ox? Oy?
9. Дайте определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.
10. Сформулируйте понятие несобственного интеграла.

3. Дифференциальные уравнения

3.1. Примеры выполнения типовых заданий

Задание 1. Найти общее решение дифференциального уравнения:
$(e^{2x}+1)dy + ye^{2x}dx = 0.$

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$(e^{2x}+1)dy = -ye^{2x}dx.$

Разделим переменные

$$\frac{dy}{y} = -\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}.$$

Проинтегрируем

$$\int\frac{dy}{y} = \int\left(-\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}\right)dx;$$

$$\int-\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1};$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + \ln|C|;$$

$$\ln|y| = \ln\frac{|C|}{\sqrt{e^{2x}+1}}; \qquad y = \frac{C}{\sqrt{e^{2x}+1}}.$$

Задание 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' - 1 = y^2$$

Решение. Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, данное уравнение перепишем в виде

$$x'\frac{dy}{dx} - 1 = y^2 \qquad \text{или} \qquad x\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \ .$$

Умножим на dx правую и левую части равенства

$$xdy = (1+y^2)dx \ .$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные, деля обе части равенства на произведение “лишних” членов $x(1-y^2)$.

$$\frac{xdy}{x(1+y^2)} = \frac{(1+y^2)dx}{x(1+y^2)}$$

После сокращения, получим

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{x}$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x}$$

После интегрирования получим

$$arctgy = \ln|x| + C \qquad (1)$$

Запишем общее решение дифференциального уравнения (1)

$$y = tg(\ln|x| + C) .$$

Решение дифференциального уравнения может быть записано также относительно x. Для этого перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$arctgy = \ln|x| + \ln C \ .$$

В данном случае неопределенная константа C представлена в виде lnC.
Преобразуем

$$\ln|xC| = arctgy \cdot \ln e \qquad (\ln e = 1) \qquad \ln|xC| = \ln e^{arctgy} \ .$$

Потенцируем полученное равенство: $xC = e^{arctgy}$.
Получаем решение дифференциального уравнения:

$$x = \frac{1}{C} e^{arctg(y)}$$

Заменив $1/C=C_1$, получим:

$$x = C_1 e^{arctg(y)}$$

Общее решение дифференциального уравнения может быть представлено также относительно C в виде $arctgy - \ln|x| = C$.

Задание 3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$xy' - y = -2\ln x.$$

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде $y=U\,V$, тогда

$$y' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

Подставим в исходное уравнение

$$x\left(U' \cdot V + U \cdot V'\right) - U \cdot V = -2\ln x;$$

$$xU' \cdot V + U(xV' - V) = -2\ln x. \qquad (2)$$

Выберем функцию V из условия

$$xV' - V = 0. \qquad (3)$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$xU' \cdot V = -2\ln x. \qquad (4)$$

Найдем V из уравнения (3):

$$x\frac{dV}{dx} = V;$$

$$xdV = Vdx; \qquad \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{dV}{V} = \int \frac{dx}{x}; \qquad \ln|V| = \ln|x| + C.$$

Пусть $C = 0$, тогда

$V = x$.

Найдем U из уравнения (4):

$$x\frac{dU}{dx} \cdot x = -2\ln x; \qquad \frac{dU}{dx} = -\frac{2\ln x}{x^2};$$

$$dU = -\frac{2\ln x dx}{x^2}.$$

Проинтегрируем:

$$\int dU = \int\left(-\frac{2\ln x}{x^2}\right)dx;$$

$$U = -2\int \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Интеграл $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ найдем с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int TdS = T \cdot S - \int SdT.$$

Пусть $T = ln\, x$ и $dS = x^{-2}dx$, тогда

$$dT = \frac{1}{x}dx; \qquad S = \int x^{-2}dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = T \cdot S - \int SdT = (\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2}dx = -\frac{\ln x}{x} - x^{-1} + C;$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Тогда

$$U = -2\left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C\right) = \frac{2}{x}(\ln x + 1) - 2C;$$

$$U = \frac{2}{x}(\ln x + 1) + 2C.$$

Итак $y = U\,V$;

$$y = 2(\ln x + 1) + Cx.$$

Задание 4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy' - 1 = y^2.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x'\frac{dy}{dx} - 1 = y^2; \quad x\frac{dy}{dx} = 1 + y^2.$$

Умножим на dx правую и левую части равенства

$$xdy = (1 + y^2)dx.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные, деля обе части равенства на произведение “лишних” членов $x(1 - y^2)$.

$$\frac{xdy}{x(1 + y^2)} = \frac{(1 + y^2)dx}{x(1 + y^2)}.$$

После сокращения, получим

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем обе части равенства

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{x}.$$

После интегрирования получим

$$arctg\, y = ln\, x + C. \qquad (5)$$

Запишем общее решение дифференциального уравнения (5)

$$y = tg(\ln|x| + C).$$

Решение дифференциального уравнения может быть записано также относительно **x**. Для этого перепишем уравнение (5) в следующем виде

$$arctgy = \ln|x| + \ln C.$$

В данном случае неопределенная константа С представлена в виде *ln C*.
Преобразуем

$$\ln|xC| = arctgy \cdot \ln e; \qquad \ln|xC| = \ln e^{arctgy}.$$

Потенцируем полученное равенство и получаем решение дифференциального уравнения.

$$x = \frac{1}{C} e^{arctg(y)}$$

Заменив $1/C = C_1$, получим

$$x = C_1 e^{arctg(y)}.$$

Общее решение дифференциального уравнения может быть представлено также относительно C в виде

$$arctgy - \ln|x| = C.$$

Задание 5. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\sqrt{(y^2+1)}dx = xydy,$$

удовлетворяющее начальному условию:

$$y(1) = \sqrt{3}.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Делим обе части уравнения на

$$x\sqrt{y^2+1}.$$

Тогда

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения.

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Интеграл, стоящий в правой части уравнения, найдем, применив замену переменной

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \left[y^2+1 = t; 2ydy = dt; ydy = \frac{dt}{2} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{y^2+1} + C.$$

Запишем общее решение дифференциального уравнения

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C.$$

Подставляя начальные условия в общее решение, найдем произвольную постоянную С.

$$\ln 1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1} + C; \qquad 0 = 2 + C; \qquad C = -2.$$

Найденное значение C = -2 подставляем в общее решение и получаем частное решение

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} - 2; \qquad \ln|x| - \sqrt{y^2+1} + 2 = 0.$$

Задание 6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xdy = (x+y)dx.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на xdx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}.$$

Проверим, является ли функция в правой части однородной.

$$f(kx,ky) = \frac{kx+ky}{kx} = \frac{k(x+y)}{kx} = \frac{x+y}{x} = f(x,y).$$

Видно, что функция в правой части является однородная функцией нулевого порядка. Тогда исходное уравнение является однородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Введем подстановку

$$\frac{y}{x} = u; \qquad y = ux; \qquad y' = u'x + u.$$

Уравнение принимает вид:

$$u'x + u = \frac{x}{x} + \frac{y}{x}; \qquad u'x + u = 1 + u.$$

Отсюда $u^I x = 1$. Заменив $u^I = du/dx$, получим $x$du/dx = 1 или $xdu = dx$ - уравнение с разделяющимися переменными. Делим его на x, получим $du = dx/x$. Проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int du = \int \frac{dx}{x}.$$

Его решение имеет вид:

$$u = \ln|x| + C.$$

Заменяя $u = y/x$ в последнем равенстве, получим

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Окончательно находим общее решение дифференциального уравнения:

$$y = x\ln|x| + C.$$

Задание 7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

Решение. Уравнение вида $y^I + P(x)y = Q(x\ )$ называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Исходное уравнение является линейным:

$$P(x) = -\frac{2}{x+1}; \qquad Q(x) = (x+1)^3.$$

Находим решение уравнения в виде произведения двух функций $y = uv$, одна из которых выбирается произвольно.

$$y' = u'v + v'u.$$

Уравнение принимает вид

$$u'v + u\left(v' - \frac{2}{x+1}v\right) = (x+1)^3;$$

$$u'v + v'u - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3;$$

$$u'v + u(v' - \frac{2}{x+1}v) = (x+1)^3.$$

Подбираем v таким образом, чтобы

$$v' - \frac{2}{x+1}v = 0$$

или

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}.$$

Интегрируя это уравнение получаем:

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x+1}; \qquad \ln|v| = 2\ln(x+1);$$

$$\ln|v| = \ln(x+1)^2; \qquad v = (x+1)^2.$$

Вернемся к исходному уравнению

$$u'v = (x+1)^3.$$

Подставив в это уравнение $u^I = du/dx$ и найденное решение для v, получим

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3.$$

Производя сокращение на $(x+1)^2$ и умножение на dx правой и левой части равенства, получим

$$du = (x+1)dx.$$

Проинтегрируем уравнение

$$\int du = \int (x+1)dx.$$

Найдем интеграл в правой части уравнения

$$\int (x+1)dx = \left[x+1 = t; (x+1)' dx = dt\right] = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Решение уравнения для функции u имеет вид:

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Общее решение данного уравнения:

$$y = uv = \left(\frac{(x+1)^2}{2} + C\right)(x+1)^2; \qquad y = \frac{(x+1)^4}{2} + c(x+1)^2.$$

Задача 8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 2y = 2\sin 2x + 2\cos 2x$$

Решение. Данное уравнение - неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общий вид которого

$$y'' + py' + qy = f(x) . \tag{6}$$

Оно отличается от соответствующего однородного линейного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{7}$$

наличием в правой части некоторой функции $f(x)$.

Для отыскания общего решения уравнения (6) сначала нужно найти общее решение Y уравнения (7), затем найти какое-либо частное решение $\tilde{y}$. Их сумма есть общее решение данного неоднородного уравнения (6):

$$y = Y + \tilde{y} .$$

Для отыскания частного решения наиболее часто применяют метод неопределенных коэффициентов. Пусть $k^2 + pk + q = 0$ - характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (7). Если правая часть уравнения (6) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x],$$

где α и β - действительные числа, а $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены соответственно *n*-й и *m*-й степени с действительными коэффициентами, то частное решение $\tilde{y}$ уравнения (6) ищется в виде

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}[M_s(x)\cos\beta x + N_s(x)\sin\beta x], \tag{8}$$

где $M_s(x)$ и $N_s(x)$- многочлены *s*-й степени (*s*– наибольшая из степеней *n и m*) с неопределенными коэффициентами. Здесь r - кратность корня характеристического уравнения $k = \alpha + \beta i$ характеристического уравнения. Для нахождения коэффициентов многочленов $M_s(x)$ и $N_s(x)$ искомое частное решение (8) подставляют в левую часть дифференциального уравнения (6) и производят упрощения. Приравнивая коэффициенты при подобных членах в правой и левой частях преобразованного тождества, получают систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов, из которых определяют эти коэффициенты.

Сначале находим решение однородного уравнения: $y'' + 4y' + 2y = 0$. Для этого составляем характеристическое уравнение и находим его корни:

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = -2 .$$

Характеристическое уравнение имеет действительный кратный корень. В соответствии с формулой $Y=(C_1x+C_2)e^{kx}$ для кратных корней характеристического уравнения записываем общее решение данного дифференциального уравнения: $Y=(C_1x+C_2)e^{-2x}$.

Определяем вид частного решения исходного уравнения по виду правой части:

$$f(x)=(3\cos\beta x+2\sin\beta x)e^{\alpha x},$$

где $\alpha=0, \beta=2$.

Так как число $\alpha+\beta i=2i$ не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой $\tilde{y}=A\cos\beta x+B\sin\beta x$ частное решение будем искать в виде $\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$, где A и B – неизвестные коэффициенты, которые нужно определить.

Находим производные функции $\tilde{y}$:

$$\tilde{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x\ ;$$

$$\tilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x\,.$$

Для нахождения коэффициентов A и B подставим выражения $\tilde{y},\tilde{y}',\tilde{y}''$ в исходное уравнение:

$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+4(A\cos 2x+B\sin 2x)=2\sin 2x+3\cos 2x$$

Приведем подобные члены и получим:

$$8B\cos 2x-8A\sin 2x=3\cos 2x+2\sin 2x\,.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в обеих частях равенства, получаем систему

$$\begin{cases}8B=3\\-8A=2\end{cases},$$

решением которой являются числа $A=-\frac{1}{4}$ и $B=\frac{3}{8}$.

Следовательно, частное решение определяется формулой

$$\tilde{y}=-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{8}\sin 2x\,.$$

На основании формулы $y=Y+\tilde{y}$ получаем общее решение исходного уравнения: $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}-\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{3}{8}\sin 2x$.

3.2. Задания для самостоятельной работы

В задачах 281 - 300 найти общее решение дифференциального уравнения.

281. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$
282. $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0.$
283. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$
284. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$
285. $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$
286. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx.$
287. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy.$
288. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0.$
289. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx.$
290. $(e^x + 8)dy - ye^xdx = 0.$
291. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0.$
292. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0.$
293. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0.$
294. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx.$
295. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$
296. $y\ln y + xy' = 0.$
297. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$
298. $(1+e^x)y' = ye^x.$
299. $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0.$
300. $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0.$

В задачах 301-320 найти решение задачи Коши.

301. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2, y(1) = 0.$
302. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5, y(2) = 4.$
303. $y' - yctgx = 2x\sin x, y(\dfrac{\pi}{2}) = 0.$
304. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, y(1) = e.$
305. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, y(0) = 0.$
306. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, y(1) = 1.$
307. $y' + ytgx = \cos^2 x, y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}.$
308. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, y(1) = 4.$
309. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = \dfrac{3}{2}.$
310. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3, y(1) = -\dfrac{5}{6}.$
311. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1), y(0) = 1.$
312. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, y(1) = 1.$
313. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, y(\dfrac{\pi}{2}) = 1.$
314. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3.$
315. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$
316. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1.$
317. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, y(1) = 1.$
318. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, y(1) = 1.$
319. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \dfrac{2}{3}.$
320. $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}.$

В задачах 321 - 340 найти общее решение дифференциального уравнения.

321. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.
322. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.
323. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.
324. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.
325. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.
326. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.
327. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.
328. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.
329. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
330. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.
331. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$.
332. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.
333. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.
334. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$.
335. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$.
336. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$.
337. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.
338. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$.
339. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.
340. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$.

3.3. Вопросы для самопроверки

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения? частным решением?
3. Каков геометрический смысл частного решения дифференциального уравнения первого порядка?
4. Приведите примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
5. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? уравнением Бернулли? Укажите способ его решения.
6. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка?
7. Какое уравнение называется характеристическим для однородного дифференциального уравнения второго порядка?
8. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения?
9. Как найти общее решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

Литература

1. Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст] : учебное пособие для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. - 8 –е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2013. - 447 с.

2. Демьян, Е.М. Математический анализ [Текст] : учебное пособие для самостоятельной работы / Е.М. Демьян, А.Г. Мокриевич. - Персиановский : ДонГАУ, 2012. – 105 с.

3. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : пособие для вузов / П.Е. Данко [и др.]. – 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и образование, 2014. - 816 с.

4. Мокриевич, А.Г. Математика в тестах [Текст] : учебное пособие для самостоятельной работы и тестовой проверки / А.Г. Мокриевич, С.Ю. Бакоев. – Персиановский : ДонГАУ, 2016.- 130 с.

5. Бакоев, С.Ю. Математическое моделирование и оптимизация в СКМ «Mathcad» [Текст] : учебное пособие для самостоятельной работы / С.Ю Бакоев, А.Г. Мокриевич. - Персиановский : ДонГАУ, 2013. – 66 с.

6. Мокриевич, А.Г. Элементы математического моделирования [Текст] : учебное пособие для самостоятельной работы / А.Г. Мокриевич, Л.А. Дегтярь. – Персиановский : ДонГАУ, 2015. - 113 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

МАТЕМАТИКА :
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Для студентов направлений подготовки
19.03.01 Биотехнология, 19.03.03 Продукты питания животного происхождения,
19.03.04 Технология продукции и организация общественного питания

Составитель: Мокриевич Алексей Геннадьевич

Подписано в печать 05.04.2018 г. Формат 60х84 1/16/
Бумага офсетная. Гарнитура шрифта Times/
Усл. печ. л. 1,875. Уч.- изд. л. 2,0.
Тираж 30. Заказ № 84745

Отдел оперативной полиграфии НГМИ Донской ГАУ
346428 г. Новочеркасск, ул. Пушкинская, 111